# $10^o$ Μάθημα: 10/12/2020

## Η συνάρτηση Βήτα:

Ορισμός: Ορίζουμε τη συνάρτηση $B(m,n)$ το ολοκλήρωμα: $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $m,n>0$. Μπορούμε να δείξουμε ότι $B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}\,d\theta$

Αν $x=\sin^2\theta$ προκύπτει

$$x=\sin^2\theta$$
$$dx = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$x=0 \Rightarrow \theta=0$$
$$x=1 \Rightarrow \theta=\pi/2$$

## Η σχέση με τη συνάρτηση Γ(x)

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad , m,n>0$$

Αποδ.:

Θεωρούμε $\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{2m-1}\cdot e^{-x^2}dx$ ώστε να γράψω

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 4\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^{2n-1}\cdot e^{-x^2}dx}_{\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy}$$

Άρα πλέον γράφω: $\Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

Αλλάζουμε σε πολικές συντεταγμένες:

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n) = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} (r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1} d\theta \cdot \int_0^{\infty} r^{2m-1+2n-1+1} e^{-r^2} dr =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1} d\theta \cdot \int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr =$$

$$= 2\cdot B(m,n)\cdot\Gamma(m+n) \Rightarrow$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

Αντίστοιχα μπορώ ν.δ.ο. $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$, $0<p<1$

μέσω της συνάρτησης $B(m,n)$ $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = B(p,1-p)\cdot\Gamma(p+1-p) \\ \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = B(p,1-p)\cdot\underbrace{\Gamma(1)}_{1} \end{array}\right.$

Γνωρίζουμε ότι $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = B(p,1-p) =$

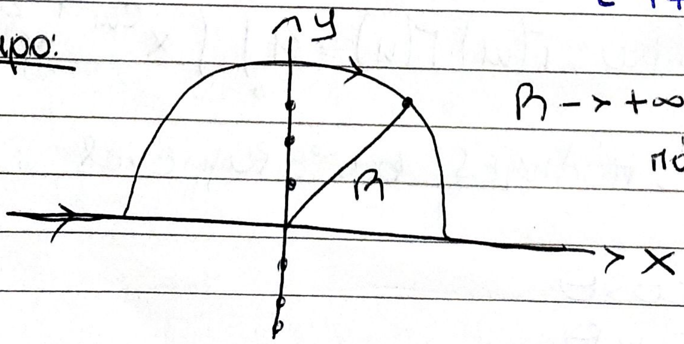
$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{1-p-1} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^p} dx \quad \left\{ \frac{x^{p-1}}{(1-x)^p} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \cdot \frac{1}{x} \right.$$

Θέτουμε $y = \dfrac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^p} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy \quad \text{Θέτουμε } y = e^x$$

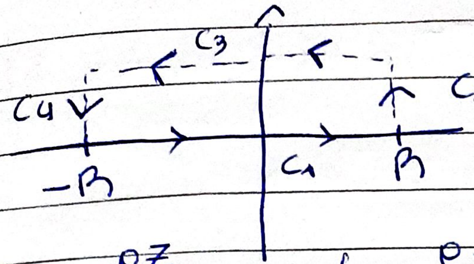
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx \quad \text{Θεωρούμε το } \oint_c \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz$$

Πρόχειρο:




$R \to +\infty$ θα έχω άπειρους πόλους.
πρέπει να τους περιορίσω

Το C είναι το εξής χωρίο:




$C_2: x=R,\ 0\leq y\leq 2\pi i$

$$\oint_C \frac{e^{pz}}{1+e^z}dz=\oint_{C_1}\frac{e^{pz}}{1+e^z}dz+\oint_{C_2}\frac{e^{pz}}{1+e^z}dz+\oint_{C_3}\frac{e^{pz}}{1+e^z}dz+\oint_{C_4}\frac{e^{pz}}{1+e^z}dz$$

$$=\underbrace{\int_{-R}^{R}}_{y=0}+\underbrace{\int_{0}^{2\pi i}}_{x=R}+\underbrace{\int_{R}^{-R}}_{y=2\pi i}+\underbrace{\int_{2\pi i}^{0}}_{x=-R}\frac{e^{pz}}{1+e^z}dz,\quad z=x+yi$$

Από το Θεώρημα Cauchy:

$$\oint\frac{e^{pz}}{1+e^z}dz=2\pi i\cdot e^{-i\pi p}$$ και τελικά

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{px}}{1+e^x}dx=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\quad 0<p<1.$$

Παρατήρηση: πόλος $1+e^z=0\Rightarrow e^z=-1$

$e^{i\pi}=-1$ $\quad z=i\pi+k\pi.$

## Τα Πολυώνυμα Bessel:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \Leftrightarrow Ay=\lambda y \Rightarrow \lambda=n^2$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση θα ήταν τύπου Euler αν δεν υπήρχε ο όρος $x^2y$.

Σύμφωνα με την μέθοδο Frobenius γράφουμε.

$$y=\sum_k c_k\cdot x^{k+6}$$

$$y' = \sum_{\kappa} c_\kappa (\kappa+\theta) x^{\kappa+\theta-1}$$

$$y'' = \sum_{\kappa} c_\kappa (\kappa+\theta)(\kappa+\theta-1) x^{\kappa+\theta-2}$$

$$x^2 y = \sum_{\kappa} c_\kappa x^{\kappa+\theta+2}$$

Θέλω $\sum_{\kappa=0}^{\infty} c_\kappa(\kappa+\theta) x^{\kappa+\theta-1}$ θέλω να το γράψω

σε μια μορφή $x^{\kappa+\theta}$ $\kappa-1 \to \kappa$.

Τελικά η εξίσωση γράφεται:

$$\sum_{\kappa} c_\kappa (\kappa+\theta)(\kappa+\theta-1) x^{\kappa+\theta} + \sum_{\kappa} c_\kappa(\kappa+\theta) x^{\kappa+\theta} +$$

$$+ \sum_{\kappa} c_{\kappa-2} x^{\kappa+\theta} + \sum_{\kappa} c_\kappa(-\nu^2) x^{\kappa+\theta} = 0$$

$$\Rightarrow c_\kappa \Big[ \underbrace{(\kappa+\theta)(\kappa+\theta-1) + (\kappa+\theta)}_{(\kappa+\theta)(\kappa+\theta-1+1) = (\kappa+\theta)^2} - \nu^2 \Big] + c_{\kappa-2} = 0$$

$$\Rightarrow c_\kappa \left[ (\kappa+\theta)^2 - \nu^2 \right] + c_{\kappa-2} = 0$$

Οι συντελεστές με αρνητικούς δείκτες μηδενίζονται.

$\kappa=0$: $c_0 \left[ \theta^2 - \nu^2 \right] = 0$ $\quad (c_{-2} = 0)$

$\Rightarrow \theta^2 = \nu^2$

$\kappa=1$: $c_1 \left[ (1+\theta)^2 - \nu^2 \right] = 0$ $\quad (c_{-1} = 0)$

$\Rightarrow (1+\theta)^2 = \nu^2$

Διακρίναμε εις περιπτώσεις: $\theta^2 = \nu^2 \Rightarrow \theta = \pm\nu$

↳ 2 λύσεις

$\boxed{\text{για } \nu \to \nu}$ $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{-c_0}{4(\nu+1)}$, $c_3 = 0$,

$$c_4 = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+2)(2\nu+4)}$$

και $y = C_0 x^{n} + C_2 x^{n+2} + C_4 x^{n+4} + \dots$

Ομοίως για $n \to -n$ (για αρνητικές τιμές) αναλυτικά ανάπτυγμα

$$y = cx^{n}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} \dots\right]$$

Παρατηρήσεις:

1. Η συνολική λύση της εξίσωσης είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων.

2. Η λύση όπως την γράψαμε ισχύει για $n \in \mathbb{N}$

3. Η συνολική λύση της εξίσωσης γράφεται ως εξής:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

όπου $J_n(x)$ η συνάρτηση Bessel 1ου είδους.
$Y_n(x)$ η συνάρτηση Bessel 2ου είδους

4. Μπορούμε να γράψουμε $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(x/2\right)^{n+2r}}{r!\cdot \Gamma(n+r+1)}$

Ιδιότητες:

1. Γεννήτρια συνάρτηση: $e^{x/2(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^{n}$ λόγω το $-n$

Αποδ: $e^{x/2(t-1/t)} = e^{xt/2}\cdot e^{-x/2t} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(xt/2\right)^{p}}{p!}\cdot \sum_{m=0} \frac{\left(\frac{-x}{2t}\right)^{m}}{m!}$

από $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^l t^l \left(\frac{x}{2}\right)^m t^{-m}}{l!\, m!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{l+m} \cdot t^{l-m}}{l!\, m!}$$ Θέτω $n = l - m \Rightarrow l = n + m$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} t^n}{(n+m)!\, m!} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n$$

## 2. Αναλυτική Συνέχιση:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$$

## Αναδρομικοί Τύποι:

1. $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$
2. $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$
3. $x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x)$
4. $x J_n'(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x)$
5. $\left[x^n J_n(x)\right]' = x^n J_{n-1}(x)$
6. $\left[x^{-n} J_n(x)\right]' = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

$$J_n = \frac{x}{2n}\left[J_{n+1} + J_{n-1}\right]$$ για εω 1.

$$J_{n+1} = \frac{x}{2(n+1)}\left[J_{n+2} + J_n\right]$$

## Ασυμπτωτικοί τύποι:

Για μεγάλες τιμές του $x$.

$$J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

## Ορθογωνιότητα:

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) \cdot J_n(\mu x)\, dx = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}\left[\mu J_n(\lambda) J_n'(\mu) - \lambda J_n(\mu) \cdot J_n'(\lambda)\right]$$

$$\int_0^1 x J_n^2(\lambda x)\, dx = \frac{1}{2}\left[J_n'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right) J_n^2(\lambda)\right]$$